

Récurtivité

Exercice 1

Formules naïves :

$$\begin{aligned} \bullet \quad x \times y &= \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ x & \text{si } y = 1 \\ x + (x \times (y - 1)) & \text{si } y > 1 \end{cases} \\ \bullet \quad a^n &= \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ a \times a^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Formules dichotomiques :

$$\begin{aligned} \bullet \quad x \times y &= \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ x & \text{si } y = 1 \\ 2 \times (x \times \frac{y}{2}) & \text{si } y > 1 \text{ et } y \text{ pair} \\ x + 2 \times (x \times \frac{y-1}{2}) & \text{si } y > 1 \text{ et } y \text{ impair} \end{cases} \\ \bullet \quad a^n &= \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ (a^{\frac{n}{2}})^2 & \text{si } n > 0 \text{ et } n \text{ pair} \\ a \times (a^{\frac{n-1}{2}})^2 & \text{si } n > 0 \text{ et } n \text{ impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Les formules naïves sont de complexité $O(y)$ et $O(n)$ alors que les formules dichotomiques sont de complexité $O(\log_2(y))$ et $O(\log_2(n))$, ce qui est plus efficace.

Exercice 2

$$\text{pgcd}(a, b) = \begin{cases} \text{pgcd}(b, a) & \text{si } b > a \\ \text{pgcd}(b, a \bmod b) & \text{si } a \bmod b > 0 \\ b & \text{si } a \bmod b = 0 \end{cases}$$

Exercice 3

```
let rec bezout a b = match a mod b with
| 1 -> 1, (a/b)
| r ->
    let c, d = bezout b r in
    let () = print_int c in
    let () = print_newline () in
    let () = print_int d in
    let () = print_newline () in
    c+(d*r), d
;;
```